Διάλεξη 5η

ΣΥΝΤΟΜΗΠΕΡΙΓΡΑΦΗΤΗΣΔΙΑΛΕΞΗΣ

- Το Θεώρημα του Lerch και η αντιστροφή του μετασχηματισμού Laplace
- Το σύνολο των αντίστροφων μετασχηματισμών
- Ύπαρξη συνεχούς αντίστροφου μετασχηματισμού - συμβολισμοί

Παραδείγματα - Παρατηρήσεις

Αντιστροφή μετασχηματισμών Laplace ρητών συναρτήσεων

Παραδείγματα - Παρατηρήσεις

Αντιστροφή μετασχηματισμών Laplace συναρτήσεων που σχετίζονται με την συνάρτηση $f(t) = [t], t \geq 0$

Παραδείγματα - Παρατηρήσεις

Από τις ιδιότητες των μετασχηματισμών Laplace που διατυπώθηκαν στις προηγούμενες διαλέξεις, προκύπτουν οι ακόλουθες προτάσεις

ΠΡΟΤΑΣΗ 4.4 (*Γραμμικότητα του αντίστροφου μετασχηματισμού*) Αν για τις $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2 : (s_0, \infty) \to \Re$ και $f_1, f_2 : [0, \infty) \to \Re$ είναι $\mathcal{L}[f_i](s) = \mathcal{F}_i(s), (i = 1, 2)$, τότε η συνάρτηση $c_1 f_1 + c_2 f_2 : [0, \infty) \to \Re$ είναι ένας αντίστροφος μετασχηματισμός της $c_1\mathcal{F}_1 + c_2\mathcal{F}_2$ (c_1, c_2 πραγματικές σταθερές). Συμβολικά γράφουμε

$$\mathcal{L}^{-1}[c_1\mathcal{F}_1 + c_2\mathcal{F}_2] = c_1\mathcal{L}^{-1}[\mathcal{F}_1] + c_2\mathcal{L}^{-1}[\mathcal{F}_2]$$

ΠΟΡΙΣΜΑ 4.4.α Αν για τις $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2 : (s_0, \infty) \to \Re$ υπάρχουν συνεχείς $f_1, f_2 : [0, \infty) \to \Re$ με $\mathcal{L}[f_i](s) = \mathcal{F}_i(s), (i = 1, 2)$, τότε η συνάρτηση $c_1 f_1 + c_2 f_2 : [0, \infty) \to \Re$ είναι ο μοναδικός συνεχής αντίστροφος μετασχηματισμός της $c_1\mathcal{F}_1 + c_2\mathcal{F}_2$ (c_1, c_2 πραγματικές σταθερές).

ΠΡΟΤΑΣΗ 4.5 Αν $\mathcal{F} : (s_0, \infty) \to \Re$ είναι ο μετασχηματισμός μιας συνάρτησης f, τότε ένας αντίστροφος μετασχηματισμός της συνάρτησης $\mathcal{F}(s - k), s > s_0 + k$ είναι η συνάρτηση $e^{kt}f(t)$ είναι, δηλαδή,

$$\mathcal{L}^{-1}[\mathcal{F}(s-k)](t) := e^{kt}\mathcal{L}^{-1}[\mathcal{F}(s)](t) = e^{kt}f(t) \quad t \geq 0.$$

ΠΡΟΤΑΣΗ 4.6 Αν $\mathcal{F} : (s_0, \infty) \to \Re$ είναι ο μετασχηματισμός μιας συνάρτησης f, τότε ένας αντίστροφος μετασχηματισμός της συνάρτησης $G(s) := e^{-cs}\mathcal{F}(s), s > s_0$ είναι η συνάρτηση

$$f_a(s) = \begin{cases} f(t-c), & c \leq t \\ 0, & t \in [0, c]. \end{cases}$$

είναι, δηλαδή,

$$\mathcal{L}^{-1}[e^{-cs}\mathcal{F}(s)](t) := f_a(t) = f(t-a)H(t-a), \quad t \geq 0.$$

και κατ΄ αναλογία, μπορούμε να γράψουμε συνοπτικά (προσοχή στους συμβολισμούς/συμβάσεις)

- $$\mathcal{L}^{-1}[\mathcal{F}(s-a)] = e^{-at}\mathcal{L}^{-1}[\mathcal{F}(s)](t)$$

- $$\mathcal{L}^{-1}[\mathcal{F}(s)\cdot\mathcal{G}(s)](t) = (f * g)(t), \quad t \geq 0.$$

- $$\mathcal{L}^{-1}[\mathcal{F}(ks)](t) = \frac{1}{k}\mathcal{L}^{-1}[\mathcal{F}(s)](\frac{t}{k}) = \frac{1}{k}f(\frac{t}{k}), \quad t \geq 0 \quad (k > 0).$$

- $$\mathcal{L}^{-1}\Big[\frac{\mathcal{F}(s)}{s}\Big](t) = \int_0^t f(u)du, \quad t \geq 0.$$

- $$\mathcal{L}^{-1}\Big[\int_s^\infty \mathcal{L}[f](s)ds\Big](t) = \frac{f(t)}{t}, \quad > 0.$$

- $$\mathcal{L}^{-1}\Big[\mathcal{F}'(s)\Big](t) = tf(t), \quad t \geq 0.$$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1: Η γραμμική εξίσωση Volterra με πυρήνα διαφοράς

Επίλυση της

$$y(t) = f(t) + \int_0^t K(t-s)y(s)ds, \quad t \geq 0$$

Παραδείγματα - Σχόλια

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2: Γραμμικές διαφορικές εξισώσεις με σταθερούς συντελεστές

ΠΡΟΤΑΣΗ. Αν f είναι κατά τμήματα συνεχής και εκθετικής τάξης, τότε οι λύσεις της γραμμικής διαφορικής εξίσωσης με σταθερούς συντελεστές

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1}y^{(n-1)}(t) + ... + a_1y'(t) + a_0y(t) = f(t), \quad t \geq 0$$

είναι εκθετικής τάξης για κάποιο $r \in \Re$.
Απόδειξη. ΕΡΓΑΣΙΑ (Υπόδειξη).

Επίλυση γραμμικών δ.ε. με σταθερούς συντελεστές

Παραδείγματα - Σχόλια

<u>ΕΦΑΡΜΟΓΗ 3:</u> Διαφορικές εξισώσεις με σταθερή υστέρηση

Η εξίσωση πρώτης τάξης

$$y'(t) + ay(t-\tau) = f(t), \quad y(t) = \phi(t), t \in [-\tau, 0].$$

Παραδείγματα - Σχόλια

Επίλυση της εξίσωσης πρώτης τάξης με χρήση μετασχηματισμού

Παραδείγματα.